



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 08 februarie 2025

Clasa a VI - a

Problema 1

Determinați numerele naturale x, y, z, t știind că sunt îndeplinite simultan relațiile

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 12000 \text{ și } \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}$$

PROBLEMA 2

Se dau mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 75/n, n \leq 2025\}$ și $B = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m : 30, m \leq 2025\}$

- Să se determine cel mai mare element al mulțimii B și cel mai mic element al mulțimii A .
- Să se calculeze cardinalul mulțimii $(A \setminus B)$.

PROBLEMA 3

Un unghi are măsura egală cu o cincime din măsura suplementului său. Determinați măsura complementului acestui unghi.

Suplimentul G.M.

PROBLEMA 4

Punctele M și N se află pe cercul de centru O și rază r astfel încât măsura arcului \widehat{MN} este de 75° și dreapta t este tangentă la cerc în punctul M . Paralela prin O la dreapta t intersectează cercul în punctele P și Q , unde P se află în același semiplan cu N față de OM .

- Aflați măsura $\sphericalangle PON$.
- Dacă bisectoarea $\sphericalangle MON$ intersectează dreapta t în R , determinați măsura $\sphericalangle ORM$.

Notă: Timp de lucru: 3 ore.

Toate subiectele sunt obligatorii.

Fiecare subiect se notează de la 0 la 7.

Nu se acordă puncte din oficiu.



Olimpiada Națională de Matematică

Etapa Locală, 08 februarie 2025

Clasa a VI-a soluții și bareme

PROBLEMA 1

Determinați numerele naturale x, y, z, t știind că sunt îndeplinite simultan relațiile

$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 12000 \text{ și } \frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8}$$

$$\frac{x}{x+2} = \frac{y}{y+4} = \frac{z}{z+6} = \frac{t}{t+8} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{6} = \frac{t}{8} = k$$

3p

$$x = 2k, y = 4k, z = 6k, t = 8k$$

1p

$$k = 10$$

2p

$$x = 20, y = 40, z = 60, t = 80$$

1p

PROBLEMA 2

Se dau mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 75/n, n \leq 2025\}$ și $B = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m : 30, m \leq 2025\}$

a. Să se determine cel mai mare element al mulțimii B și cel mai mic element al mulțimii A.

b. Să se calculeze cardinalul mulțimii $(A \setminus B)$.

$$a. \quad 2025 : 30 = 67 \text{ rest } 15 \Rightarrow \text{cel mai mare } m \in B \text{ este } 67 \cdot 30 = 2010$$

2p

$$\text{iar cel mai mic element din } A \text{ este } 0$$

1p

$$b. \quad A = \{0, 75, 150, \dots, 2025\} = \{0 \cdot 75, 1 \cdot 75, 2 \cdot 75, \dots, 27 \cdot 75\} \Rightarrow \text{card}(A) = 28$$

1p

$$[75, 30] = 150$$

1p

$$A \cap B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid m : 150, m \leq 2025\} = \{1 \cdot 150, 2 \cdot 150, \dots, 13 \cdot 150\}$$

1p

$$\text{card}(A \setminus B) = \text{card}(A) - \text{card}(A \cap B) = 28 - 13 = 15$$

1p



PROBLEMA 3

Un unghi are măsura egală cu o cincime din măsura suplementului său. Determinați măsura complementului acestui unghi.

$$180^\circ : \begin{array}{|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} \\ \hline 180^\circ - x & x \\ \hline \end{array}$$

$$180^\circ = (180^\circ - x) + x, \text{ unde } x = \text{măsura unghiului} \quad 2p$$

$$180^\circ : \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \hline 180^\circ - x & & & & & x \\ \hline \end{array}$$

$$180^\circ = (5x) + x = 6x \quad 2p$$

$$x = 30^\circ \quad 1p$$

$$\text{Complementul lui } x \text{ este } 60^\circ \quad 2p$$

PROBLEMA 4

Punctele M și N se află pe cercul de centru O și rază r astfel încât măsura arcului \widehat{MN} este de 75° și dreapta t este tangentă la cerc în punctul M. Paralela prin O la dreapta t intersectează cercul în punctele P și Q, unde P se află în același semiplan cu N față de OM.

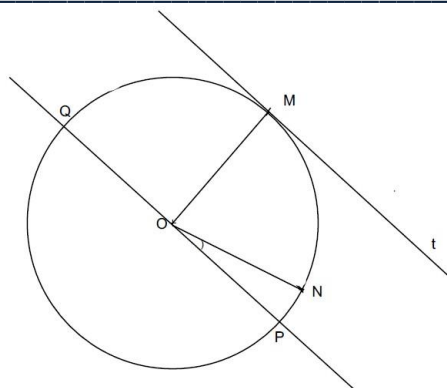
- Aflați măsura $\sphericalangle PON$.
- Dacă bisectoarea $\sphericalangle MON$ intersectează dreapta t în R, determinați măsura $\sphericalangle ORM$.



- a. Realizare desen corespunzător ipotezei a.

$$t \parallel PQ \Rightarrow m(\sphericalangle POM) = 90^\circ$$

$$m(\sphericalangle PON) = 90^\circ - 75^\circ = 15^\circ$$



1p

1p

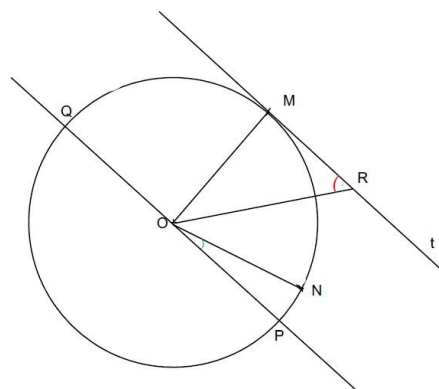
1p

- b. Completare desen corespunzător ipotezei b.

$$m(\sphericalangle POR) = m(\sphericalangle ORM) \text{ (alterne interne)}$$

$$m(\sphericalangle RON) = 37^\circ 30'$$

$$m(\sphericalangle ORM) = m(\sphericalangle POR) = 37^\circ 30' + 15^\circ \\ = 52^\circ 30'$$



1p

1p

1p

1p